8.1 – 8.2

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 177 – 179

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε είναι όμοια;

ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια προς τρίτο τότε είναι μεταξύ τους όμοια

Απάντηση

i) Προφανώς ναι (έχουν ίσες γωνίες)

ii) Ναι διότι δύο γωνίες του ενός θα είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου

2.

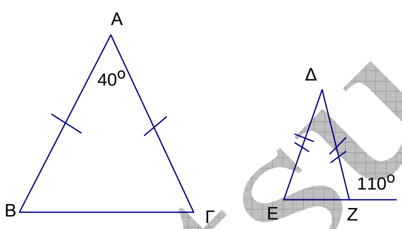
Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια ;

Απάντηση

Όχι

3.

Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 3ΔΕ . Να βρεθεί ο λόγος $\frac{EZ}{B\Gamma}$



Απάντηση

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ κάθε μία από τις προσκείμενες στην βάση του γωνία είναι 70^o

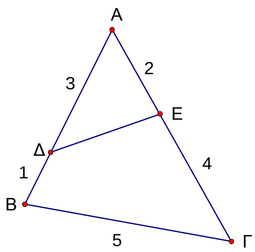
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ κάθε μία από τις ίσες γωνίες Ε και Ζ είναι 70^o

Τα τρίγωνα λοιπόν είναι όμοια, άρα

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = 3 \Rightarrow \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{1}{3}$$

4.

Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του ΔΕ



Απάντηση

Είναι $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

και $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$

και αφού η γωνία Α είναι κοινή των τριγώνων ΑΔΕ, ΑΒΓ, αυτά είναι όμοια.

Οπότε $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{\Delta E}{5} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{\Delta E}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta E = 2{,}5$

5.

Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm, 4cm, 5cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του ;

Απάντηση

Αν x, ψ, z είναι οι ομόλογες πλευρές των δοθέντων, τότε

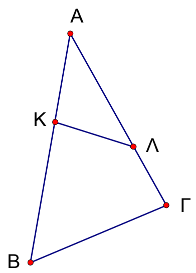
$$\frac{x}{3}=\frac{\psi}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+\psi+z}{12}=\frac{24}{12}=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}=2 \quad \text{και} \quad \frac{\psi}{4}=2 \quad \text{και} \quad \frac{z}{5}=2$$

$$x = 6cm, \quad \psi = 8cm \quad \text{και} \quad z = 10cm$$

6.

Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι εγγράψιμο , τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια ; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;

Απάντηση



Αφού ΚΛΓΒ εγγράψιμο, θα είναι

$\hat{B} = K\hat{\Lambda}A$ και $\hat{\Gamma} = \Lambda\hat{K}A$

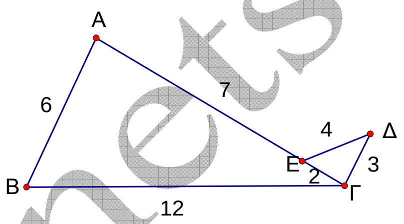
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια.

Ομόλογη πλευρά της ΑΒ είναι η ΑΛ , της ΑΓ η ΑΚ και της ΒΓ η ΚΛ.

7.

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες ;
Δικαιολογήστε την απάντηση σας .

Απάντηση



Είναι $\frac{AB}{E\Gamma}=\frac{6}{2}=3$

$\frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{9}{3}=3$

$\frac{B\Gamma}{\Delta E}=\frac{12}{4}=3$

Άρα $\frac{AB}{E\Gamma}=\frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$

Από τη ισότητα αυτή προκύπτει ότι οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ είναι ομόλογες, οπότε οι απέναντι αυτών γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $E\hat{\Gamma}\Delta$ θα είναι ίσες, άρα ΑΒ || ΔΓ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

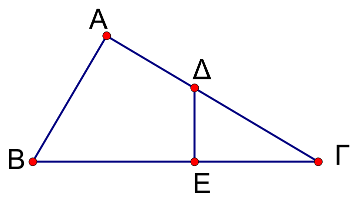
1.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ, και ΔΕΓ είναι όμοια

ii) ΑΓ . ΕΔ = ΑΒ . ΕΓ

Λύση



i)
Τρ.ΑΒΓ όμοιο του τρ.ΕΔΓ αφού είναι ορθογώνια με $\hat{\Gamma}$ κοινή.

ii)
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΕΔ}}$,
που ισχύει από το i).

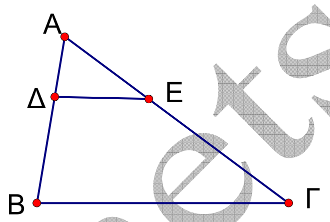
2.

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = $\frac{1}{3}$ΑΒ και ΓΕ = $\frac{2}{3}$ΑΓ. Να αποδείξετε ότι

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ, και ΑΔΕ είναι όμοια

ii) ΒΓ = 3 ΔΕ

Λύση



i)
$\text{ΓΕ} = \frac{2}{3}\text{ΑΓ} \Rightarrow \text{ΑΕ} = \frac{1}{3}\text{ΑΓ} \Rightarrow \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{1}{3}$

αλλά $\text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΒ} \Rightarrow \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{3}$

Άρα $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}$

Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΒΓ, και ΑΔΕ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία $\hat{A}$ κοινή.

ii)

Από (i) $\Rightarrow \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} \Rightarrow \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ ΒΓ = 3 ΔΕ.

3.

Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές α, β, γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;

Λύση

Έστω α', β', γ' οι πλευρές του διασταλμένου τριγώνου.

$$\alpha' = \alpha + \frac{1}{15}\alpha = \frac{16}{15}\alpha \;\Rightarrow\; \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{16}{15}$$

Ομοίως $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{16}{15}$

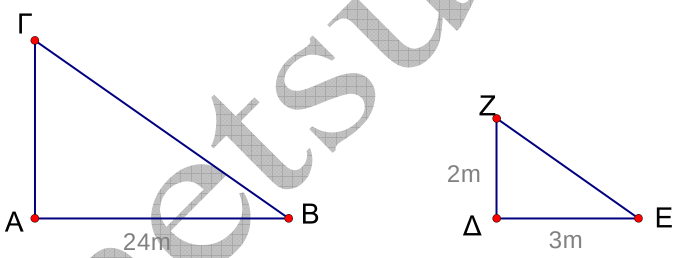
και $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{16}{15}$

Άρα $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} \Rightarrow$ τα δύο τρίγωνα είναι όμοια $\Rightarrow$ έχουν γωνίες ίσες, άρα και το δεύτερο τρίγωνο ορθογώνιο.

4.

Ένα δένδρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δένδρου.

Λύση



Έστω ΑΒΓ και ΔΕΖ τα τρίγωνα που δημιουργούν το δένδρο και η ράβδος με τις σκιές τους αντίστοιχα.

Τα δύο τρίγωνα είναι ορθογώνια και έχουν $\hat{B} = \hat{E}$, αφού $\Gamma B \parallel ZE$ σαν ακτίνες του ήλιου, άρα είναι όμοια $\Rightarrow$

$$\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{AB}{\Delta E} \;\Rightarrow\; \frac{A\Gamma}{2} = \frac{24}{3} \;\Rightarrow\; \frac{A\Gamma}{2} = 8 \;\Rightarrow\; A\Gamma = 16\text{m}$$

5.

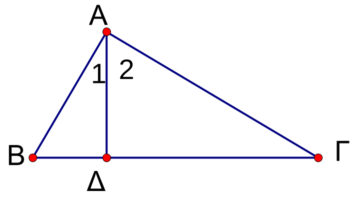
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι

i) $ΑΔ^2 = ΔΒ \, . \, ΔΓ$

ii) $ΑΒ^2 = ΒΔ \, . \, ΒΓ$

iii) $ΑΒ \, . \, ΑΓ = ΑΔ \, . \, ΒΓ$

Λύση



i)

$\hat{Α}_1 = \hat{Γ}$ (οξείες με πλευρές κάθετες) $\Rightarrow$

τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ, ΔΑΓ είναι όμοια,

άρα $\dfrac{ΔΑ}{ΔΓ} = \dfrac{ΔΒ}{ΔΑ} \Rightarrow ΑΔ^2 = ΔΒ \, . \, ΔΓ$

ii)

τρ.ΔΑΒ όμοιο του τρ.ΑΒΓ (ορθογώνια με $\hat{Β}$ κοινή) $\Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{ΒΔ}{ΑΒ}$

$ΑΒ^2 = ΒΔ \, . \, ΒΓ$

iii)

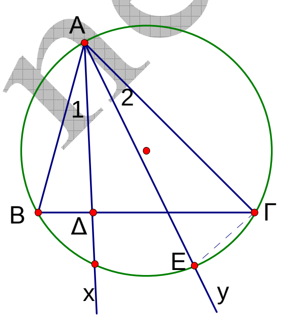
τρ.ΔΑΒ όμοιο του τρ.ΑΒΓ $\Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{ΑΔ}{ΑΓ}$

$ΑΒ \, . \, ΑΓ = ΑΔ \, . \, ΒΓ$

6.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και οι ευθείες Αx και Αy που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΑΒ και ΑΓ και τέμνουν τη ΒΓ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ \, . \, ΑΕ = ΑΒ \, . \, ΑΓ$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΕ}$ ή αρκεί

τρ.ΑΔΒ όμοιο του τρ.ΑΓΕ, το οποίο συμβαίνει

διότι $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ από υπόθεση και

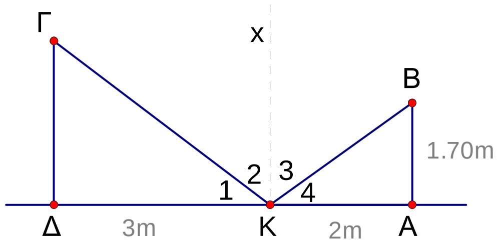
$\hat{Β} = \hat{Ε}$ εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Ο παρατηρητής ΑΒ βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη Κ. Να υπολογίστε το ύψος του φανοστάτη ΔΓ, όταν είναι ΔΚ = 3m, ΑΚ = 2m και το ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).

Λύση



$\hat{K}_1 = \hat{K}_4$ σαν συμπληρωματικές των $\hat{K}_2 = \hat{K}_3$

Είναι και $\hat{\Delta} = \hat{A} = 1\llcorner$, οπότε τα τρίγωνα ΔΚΓ, ΑΒΚ είναι όμοια $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta\Gamma}{AB} = \frac{\Delta K}{KA} \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{1.70} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$2\ \Delta\Gamma = 5{,}10 \Rightarrow \Delta\Gamma = 2{,}55m$

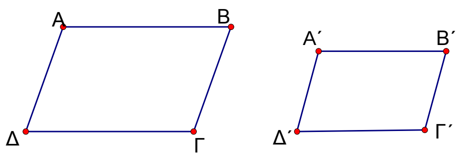
2.

Να αποδείξετε ότι

i) Δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες

ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

Λύση



i)

Υποθέσεις:

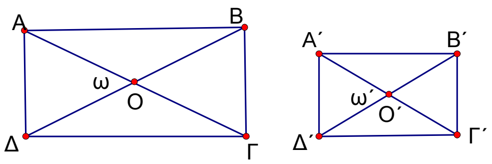
$\dfrac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \dfrac{ΑΔ}{Α΄Δ΄}$ **(1)** και $\hat{Α} = \hat{Α}'$

(1) $\Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \dfrac{ΒΓ}{Β΄Γ΄} = \dfrac{ΓΔ}{Γ΄Δ΄} = \dfrac{ΑΔ}{Α΄Δ΄}$

$\hat{Α} = \hat{Α}' \Rightarrow \hat{Β} = \hat{Β}'$ (παραπληρωματικές των $\hat{Α} = \hat{Α}'$) και

$\hat{Γ} = \hat{Γ}'$ και $\hat{Δ} = \hat{Δ}'$ (απέναντι γωνίες παρ/μμου)

Άρα τα ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια.



ii)

Κατά το i), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\dfrac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \dfrac{ΑΔ}{Α΄Δ΄}$

Επειδή $\hat{ω} = \hat{ω}'$, τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑ΄Β΄ είναι όμοια $\Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \dfrac{ΑΟ}{Α΄Ο΄}$

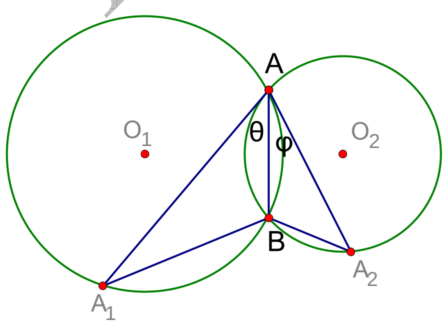
Ομοίως τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΑ΄Δ΄ είναι όμοια $\Rightarrow \dfrac{ΑΔ}{Α΄Δ΄} = \dfrac{ΑΟ}{Α΄Ο΄}$

Άρα $\dfrac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \dfrac{ΑΔ}{Α΄Δ΄}$

3.

Θεωρούμε τους κύκλους (O_1, R_1) και (O_2, R_2) που τέμνονται στα Α, Β. Αν οι εφαπτόμενες στο Α τέμνουν τους κύκλους στα $Α_1$, $Α_2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΑ_1 . ΒΑ_2$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\dfrac{ΑΒ}{ΒΑ_1} = \dfrac{ΒΑ_2}{ΑΒ}$ ή ότι

τρ.$ΑΒΑ_1$ όμοιο του τρ. $ΑΒΑ_2$,

το οποίο συμβαίνει αφού

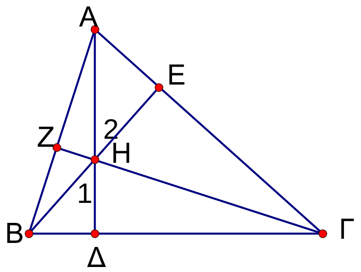
$\hat{Α}_1 = φ$ και $\hat{Α}_2 = θ$

(εγγεγραμμένη – από χορδή και εφαπτομένη)

4.

Αν $ΑΔ$, $ΒΕ$, $ΓΖ$ είναι τα ύψη και $Η$ το ορθόκεντρο τριγώνου $ΑΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΗΔ \,.\, ΗΑ = ΗΒ \,.\, ΗΕ = ΗΓ \,.\, ΗΖ$.

Λύση



Για την ισότητα $ΗΔ \,.\, ΗΑ = ΗΒ \,.\, ΗΕ$,

αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{ΗΔ}{ΗΕ} = \dfrac{ΗΒ}{ΗΑ}$,

ή αρκεί ότι τρ.$ΗΔΒ$ όμοιο του τρ.$ΗΕΑ$,

το οποίο συμβαίνει αφού είναι ορθογώνια

και έχουν $\hat{Η}_1 = \hat{Η}_2$.

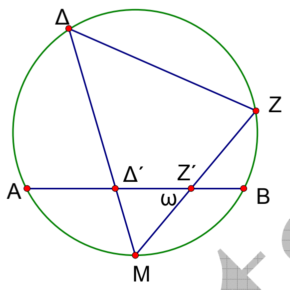
Ομοίως τρ.$ΗΒΖ$ όμοιο του τρ.$ΗΕΓ$.

5.

Από το μέσο $Μ$ του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ φέρουμε τις χορδές $ΜΔ$ και $ΜΖ$, που τέμνουν τη χορδή $ΑΒ$ στα $Δ΄$ και $Ζ΄$ αντίστοιχα.. Να αποδειχθεί ότι

$ΜΔ \,.\, ΜΔ΄= ΜΖ \,.\, ΜΖ΄$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{ΜΔ}{ΜΖ΄} = \dfrac{ΜΖ}{ΜΔ΄}$

ή αρκεί ότι τρ.$ΜΔΖ$ όμοιο του τρ.$ΜΖ΄Δ΄$

και επειδή έχουν τη γωνία $\hat{Μ}$ κοινή,

αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{Δ} = \hat{ω}$.

$$\hat{Δ} = \frac{\overset{\frown}{ΜΒΖ}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ΜΒ} + \overset{\frown}{ΒΖ}}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

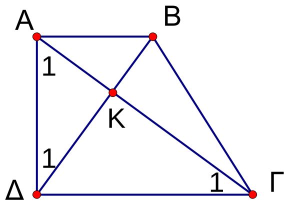
Από εφαρμογή στις εγγεγραμμένες γωνίες ισχύει $\hat{ω} = \dfrac{\overset{\frown}{ΑΜ} + \overset{\frown}{ΒΖ}}{2}$ **(2)**

Και επειδή $\overset{\frown}{ΑΜ} = \overset{\frown}{ΜΒ}$, τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα $\hat{Δ} = \hat{ω}$.

6.

Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\Delta^2 = AB \cdot \Delta\Gamma$

ή αρκεί $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$

ή αρκεί τρ.ΑΔΓ όμοιο του τρ.ΑΒΔ

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΔ $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}_1$ συμπληρωματική της $\hat{A}_1$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ $\Rightarrow$ $\hat{\Gamma}_1$ συμπληρωματική της $\hat{A}_1$.

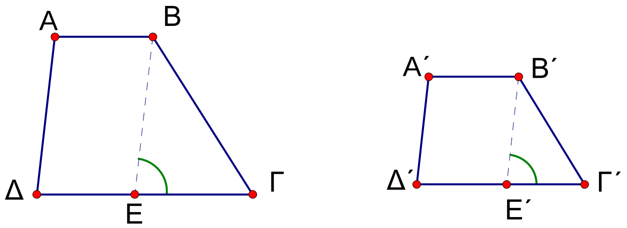
Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$ $\Rightarrow$ τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΒΔ είναι όμοια.

Σύνθετα Θέματα

1.

Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

Λύση



Υποθέσεις

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'}=\lambda \qquad \textbf{(1)}$$

$\hat{\Delta}=\hat{\Delta}'$ και $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$ άρα και

$\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$

σαν παραπληρωματικές ίσων.

Φέρουμε $BE \parallel A\Delta$ και $B'E' \parallel A'\Delta'$ τότε $ABE\Delta$, $A'B'E'\Delta'$ παραλληλόγραμμα

$$(1) \Rightarrow \lambda=\frac{AB}{A'B'}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{\Delta\Gamma-\Delta E}{\Delta'\Gamma'-\Delta'E'}=\frac{E\Gamma}{E'\Gamma'} \Rightarrow \lambda=\frac{E\Gamma}{E'\Gamma'} \qquad \textbf{(2)}$$

Ακόμη $\hat{E}=\hat{\Delta}=\hat{\Delta}'=\hat{E}'$ και επειδή $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \Rightarrow$ τρ.ΒΕΓ όμοιο του τρ.Β΄Ε΄Γ΄ $\Rightarrow$

$$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{BE}{B'E'}=\frac{E\Gamma}{E'\Gamma'}\overset{(2)}{=}\lambda \qquad \textbf{(3)}$$

Λόγω των παρ/μμων έχουμε $BE=A\Delta$ και $B'E'=A'\Delta'$.

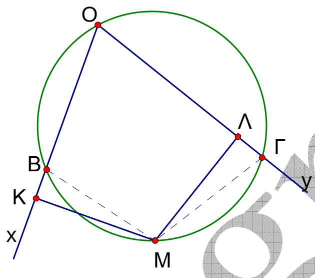
$$\text{Η } (3) \Rightarrow \frac{A\Delta}{A'\Delta'}=\lambda \qquad \textbf{(4)}$$

Οι (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow$ τα τραπέζια έχουν πλευρές ανάλογες
και επειδή έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες,
είναι ίσα.

2.

Έστω δοσμένη γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Μ. Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα Ο και Μ τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα Β και Γ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$, όπου d, d΄ είναι οι αποστάσεις του Μ από τις Οx, Oy αντίστοιχα.

Λύση



Έστω ΜΚ = d και ΜΛ = d΄

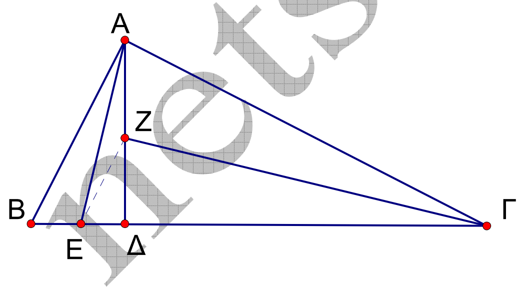
Αρκεί να αποδείξουμε ότι τρ.ΜΚΒ όμοιο του τρ.ΜΛΓ και επειδή είναι ορθογώνια αρκεί η γωνία $\hat{B}$ του ενός να είναι ίση με τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του άλλου.

Αυτό ισχύει, αφού το ΟΒΜΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο, οπότε η εσωτερική του $\hat{\Gamma}$ ισούται με την απέναντι εξωτερική $\hat{B}$.

3.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει το ΑΔ στο Ζ και η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΖΕ || ΑΒ

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{ZA}{Z\Delta} = \frac{EB}{E\Delta}$$

Θεώρημα εσ. διχοτόμου στο τρ.ΓΑΔ $\Rightarrow \frac{ZA}{Z\Delta} = \frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}$

Θεώρημα εσ. διχοτόμου στο τρ.ΑΒΔ $\Rightarrow \frac{EB}{E\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$

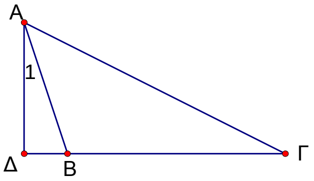
Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$,

ή ότι τρ.ΑΒΓ όμοιο του ΑΓΔ, το οποίο ισχύει, αφού είναι ορθογώνια με $\hat{\Gamma}$ κοινή.

4.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1\llcorner$ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = \Delta B \,.\, \Delta\Gamma$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{A\Delta}{\Delta B}=\dfrac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, ή αρκεί τρ.ΑΔΓ όμοιο του τρ.ΑΔΒ και επειδή είναι ορθογώνια αρκεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ του ενός να είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}_1$ του άλλου.

Στο τρ.ΑΔΒ έχουμε $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1 \;\Rightarrow\; \hat{B} = 1\llcorner + \hat{A}_1$

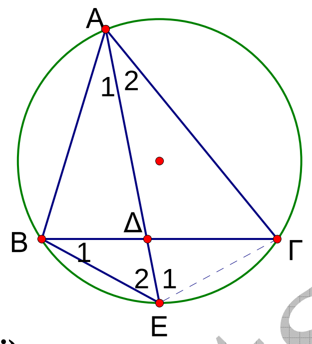
Η υπόθεση $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1\llcorner$ γίνεται $1\llcorner + \hat{A}_1 - \hat{\Gamma} = 1\llcorner \;\Rightarrow\; \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$

5.

Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε.
Να αποδείξετε ότι i) $AB \,.\, A\Gamma = A\Delta \,.\, AE$

ii) $EB^2 = EA \,.\, E\Delta$

Λύση



i)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma}$, ή αρκεί τρ.ΑΔΒ όμοιο του τρ.ΑΕΓ.

Έχουν $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος) και

$\hat{B}=\hat{E}_1$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$).

Άρα είναι όμοια.

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{E\Delta}{EB}$, ή αρκεί τρ.ΕΒΔ όμοιο του τρ.ΕΑΒ.

Έχουν κοινή τη γωνία $\hat{E}_2$ και $\hat{B}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_1$